

Vysoké učení technické v Brně

Fakulta strojního inženýrství

Matematika

**Příručka pro přípravu
k přijímacím zkouškám**

Doc. PaedDr. Dalibor Martišek, Ph.D.

RNDr. Milana Faltusová

Autoři: Doc. PaedDr. Dalibor Martišek, Ph.D.
RNDr. Milana Faltusová
Lektorovala: RNDr. Zuzana Chvátalová

1. Vydání

© Dalibor Martišek, Milana Faltusová, 2004

ISBN

Obsah

Předmluva	9
1 Základy matematické logiky a teorie množin	11
1.1 Výroky a operace s nimi	11
1.2 Množiny a operace s nimi	13
1.3 Zobrazení	17
1.4 Základní množiny bodů	19
1.5 Matematické axiomy, definice, věty a důkazy	21
2 Základní poznatky o číselných oborech	24
2.1 Přirozená čísla	24
2.2 Celá čísla	27
2.3 Racionální čísla	29
2.4 Reálná čísla	32
2.5 Komplexní čísla	39
3 Algebraické výrazy	41
3.1 Mnohočleny	41
3.2 Racionální lomené výrazy	47
3.3 Iracionální výrazy	50
4 Algebraické rovnice a nerovnice	52
4.1 Základní pojmy	52
4.2 Lineární rovnice a nerovnice s jednou neznámou	54
4.3 Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou	62
4.4 Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými	64
4.5 Soustava tří lineárních rovnic se třemi neznámými	66
4.6 Kvadratické rovnice a nerovnice	68
4.7 Iracionální rovnice a nerovnice	72
4.8 Rovnice s parametry	75
4.9 Vyjadřování neznámé z technických vzorců	78
5 Funkce	80
5.1 Základní pojmy	80
5.2 Vlastnosti funkcí	82
5.3 Elementární funkce	83
5.4 Funkce prostá a inverzní	85
5.5 Funkce exponenciální a logaritmická	88
5.6 Exponenciální a logaritmické rovnice	91
5.7 Oblouková míra, orientovaný úhel	95
5.8 Goniometrické funkce	96
5.9 Goniometrické rovnice	103
5.10 Goniometrický tvar komplexních čísel	106
5.11 Konstrukce grafů funkcí	109
5.12 Posloupnosti	114

6 Planimetrie	119
6.1 Úhel	119
6.2 Trojúhelník	120
6.3 Kružnice a kruh	122
6.4 n -úhelníky	126
6.5 Pravoúhlý trojúhelník	127
6.6 Obecný trojúhelník	132
6.7 Obvody a obsahy geometrických obrazců	136
6.8 Zobrazení v rovině	139
 7 Analytická geometrie v rovině	147
7.1 Úsečka	147
7.2 Vektory v rovině	147
7.3 Přímka v rovině	153
7.4 Dvě přímky v rovině	159
7.5 Kuželosečky	161
 8 Stereometrie	167
8.1 Polohové vlastnosti v prostoru	167
8.2 Metrické vlastnosti v prostoru	168
8.3 Geometrická tělesa	171
8.4 Objemy a povrchy těles	174
 9. Kombinatorika, teorie pravděpodobnosti a matematická statistika	180
9.1 Kombinatorika	180
9.2 Binomická věta	187
9.3 Základy teorie pravděpodobnosti	188
9.4 Úvod do statistiky	195
 Ukázka přijímacího testu z matematiky	203
 Použitá literatura	205

Vážení uchazeči o studium,

jedním z nejdůležitějších předmětů na Fakultě strojího inženýrství v Brně v prvních dvou ročnících studia je matematika. Tento předmět dělá mnohým studentům potíže. Kamenem úrazu je především první semestr, který mnozí studenti nezvládnou. Příčinou nezdaru však nebývá obtížnost vysokoškolské matematiky, ale hrubé nedostatky v matematice středoškolské.

K úspěšnému absolvování FSI VUT jsou nutné znalosti vybraných partií středoškolské matematiky v rozsahu, který je uveden v tomto textu. Jsme si vědomi toho, že na naši fakultu se hlásí absolventi různých typů škol, kteří studovali matematiku v různém rozsahu a mnohé požadované znalosti nemají. Naše škola i těmto uchazečům dává možnost studium zahájit a případné nedostatky ve středoškolské matematice postupně odstranit. Příjímací zkoušky z matematiky jsou totiž nastaveny tak, že lze uspět i s určitými mezerami a se znalostmi podstatně povrchnějšími, než které jsou ke studiu skutečně potřeba (ukázku přijímacího testu najdete v závěru tohoto textu).

Student, který se při zahájení studia spoléhá jen na svůj úspěch u přijímacích zkoušek, se ovšem vystavuje značnému riziku. Mezery ve středoškolské látce jsou většinou odhaleny velmi brzy. Vysokoškolské studium je náročné na čas, doplňování středoškolské látky během semestru bývá často obtížné, a proto mnoho studentů končí se studiem hned u první zkoušky z matematiky.

Tento text může posloužit nejen těm, kteří se k přijímacím zkouškám připravují, ale i těm, kteří již zkoušky úspěšně zvládli, ale obávají se podobných neúspěchů při přechodu na vysokou školu. Prostudování tohoto textu a propočítání řešených i neřešených příkladů podstatně sníží riziko podobných potíží.

Přejeme Vám hodně úspěchů ve studiu.

Autoři

Text je součástí řešení výzkumného záměru

CEZ: J22/98231100009 „Netradiční metody studia komplexních a neurčitých systémů“.

1 Základy matematické logiky a teorie množin

Není jisté, zda žil Homér. Bezpečně víme jen to, že byl slepý....

(ze školních lavic)

1.1 Výroky a operace s nimi

Vyjadřovací prostředky matematiky, s nimiž se setkáváme v učebnicích a dalších matematických textech, se skládají z běžného spisovného jazyka a z jazyka speciálního. Do tohoto speciálního jazyka je třeba zahrnout matematickou terminologii a symboliku a dále grafy, schémata, diagramy a tabulky.

Symboly (znaky) umožňují matematické stručné vyjadřování. Uvažovaným objektům přiřadíme název (jméno) a symbol, který bude daný objekt zastupovat: čtyři (4), Ludolfovo číslo (π), funkce (f) apod.

Konstanty – jsou objekty, které mohou nabývat jediné hodnoty. Označujeme je buď přímo touto hodnotou (číslem) nebo písmenem zpravidla z počátku abecedy ($a, b, c, \dots$), popř. speciálními symboly (π).

Proměnné – jsou objekty, které mohou nabývat více hodnot. Označujeme je zpravidla písmeny z konce abecedy ($\dots, x, y, z$).

Výrok – je sdělení (jazykový výraz), o kterém má smysl rozhodovat, zda se jedná o sdělení pravdivé či nepravdivé, přičemž může nastat právě jedna z těchto dvou možností. Gramaticky má výrok vždy formu oznamovací věty.

Věta „úhlopříčky v rovnoběžníku se půlí“ je výrok, a to výrok pravdivý.

Věta „každé prvočíslo je liché“ je výrok, a to výrok nepravdivý.

Věta „existují mimozemské civilizace“ je výrok. Má smysl se ptát, zda je to pravda nebo ne, o pravdivosti či nepravdivosti však prozatím nedovedeme rozhodnout. Takové výroky se nazývají hypotézy.

Věta „Kolik je hodin?“ není výrok (nemá smysl se ptát, zda je věta pravdivá či nikoli).

Operace s výroky: Z daných výroků lze tvořit výroky nové pomocí následujících operací:

Název operace	Význam	Označení	Kdy je výrok pravdivý?
Negace p	p neplatí	$\neg p$	Je-li p pravdivý, je $\neg p$ nepravdivý, je-li p nepravdivý, je $\neg p$ pravdivý.
Konjunkce p, q	p a q	$p \wedge q$	Oba výroky p, q musí být pravdivé.
Disjunkce p, q	p nebo q	$p \vee q$	Alespoň jeden z výroků p, q musí být pravdivý.
Implikace p, q	Jestliže p , pak q	$p \Rightarrow q$	Jsou-li oba výroky pravdivé, nebo p nepravdivý.

U složitějších konstrukcí lze pravdivost zjišťovat pomocí tzv. tabulky pravdivostních hodnot:

1. Příklad: Uvažujme dva výroky: Výrok p : „odpoledne budu doma“, výrok q : „Budu se dívat na televizi“. Tyto výroky spojíme spojkou „a“: $p \wedge q$: „odpoledne budu doma a budu se dívat na televizi“. Pravdivost tohoto výroku bude záviset na pravdivosti nebo nepravdivosti výchozích výroků p, q . Musíme uvažovat čtyři různé situace tak, jak je zachycují první dva sloupce následující tabulky (jednička znamená: výrok je pravdivý, nula: výrok je nepravdivý).

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$(\neg p) \vee q$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

První řádek tedy znamená, že skutečně sedím doma (p je pravdivý) a opravdu se dívám na televizi (q je rovněž pravdivý). Druhý řádek – jsem doma (p je pravdivý), ale na televizi se nedívám (q je nepravdivý). Třetí – nejsem doma, dívám se na televizi (např. u spolužáka) a konečně čtvrtý – nejsem doma, nedívám se na televizi (např. venku hraji fotbal).

Výrok $p \wedge q$: „odpoledne budu doma a budu se dívat na televizi“ bude pravdivý pouze v prvním případě (viz sloupec 3). Spojku **nebo** jsme běžně zvyklí používat spíše ve vylučovacím smyslu (bud’ - anebo) – v tom případě by musela být v prvním řádku čtvrtého sloupce nula. V matematice je třeba tuto spojku chápat ve smyslu „nevylučovacím“ – výrok $p \vee q$ je nepravdivý jedině tehdy, jsou-li nepravdivé oba výchozí výroky (viz sloupec 4).

Pravdivostní hodnota implikace dělá studentům největší potíže. Třetí řádek pátého sloupce se často interpretuje jako „z nepravdy plyne pravda“ a zdá se zcela nepochopitelné, že by toto jako celek mohl být pravdivý výrok. Vraťme se však k našemu příkladu. Výrok $p \Rightarrow q$ pak zní: „Jestliže budu doma, pak se budu dívat na televizi“ a je třeba vycházet z „presumce neviny“. Říkám, co budu dělat v případě, že budu doma. O tom, co budu dělat, když doma nebudu, neříkám vůbec nic. Mimo domov si mohu dělat, co chci a **nemohu lhát** – musím mít tudíž pravdu – viz třetí a čtvrtý řádek pátého sloupce. Při podrobnějším studiu matematické logiky bychom se skutečně přesvědčili, že z nepravdivého předpokladu lze matematickými prostředky odvodit naprosto cokoli – nepravdu i pravdu.

Náš příklad má pouze ilustrační charakter. Matematikům je samozřejmě zcela jedno, kdo se kde a s kým dívá na televizi. Tento aparát se používá při dokazování matematických tvrzení. Většina z těchto tvrzení (matematických vět) má podobu implikace, např. „Jestliže je číslo dělitelné šesti, pak je dělitelné dvěma“. Někdy je výhodnější nedokazovat výrok $p \Rightarrow q$, ale např. výrok $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ („Jestliže číslo není dělitelné dvěma pak není dělitelné šesti“), který „tvrdí totéž“ – **je ekvivalentní**, jak je zřejmé z pátého a jedenáctého sloupce naší tabulky. Ekvivalentní je dokonce i výrok $(\neg q) \vee p$ („Číslo není dělitelné dvěma nebo je dělitelné šesti), což už na první pohled vůbec není zřejmé (viz sloupec 10).

Výrokové formy – jsou výrazy, které obsahují jednu nebo více proměnných a které se po dosazení hodnot za proměnnou stanou výroky. Například výraz $x^2 = 1$ je výrokovou formou, která se po dosazení +1 nebo -1 za proměnnou x změní v pravdivý výrok. Dosazením libovolné jiné hodnoty se stane výrokem nepravdivým.

Kvantifikované výroky: dosazení konstant za proměnné není jediný způsob, jak z výrokové formy vytvořit výrok. Druhou možností je doplnění údaje o počtu hodnot, pro které daná výroková forma platí. Např. věta „existují tři čísla x , pro která platí $x < 5$ “ je výrok, a to výrok pravdivý. Čísla, pro která tato nerovnost platí, jsou např. 2,3,4 a není to samozřejmě jediná možnost. Věta „Existují dvě různá čísla x , pro která platí $|x| \leq 0$ “ je výrok nepravdivý,

neboť tato nerovnost platí jedině pro nulu. Takové výroky se nazývají kvantifikované. Zcela zásadní význam mají v matematice tři typy kvantifikovaných výroků:

Název výroku	Význam	Zápis	Příklad
obecný	Pro každé x platí,	$\forall x : \boxed{\text{výroková forma}}$	$\forall x : x^2 \geq 0$
existenční	Existuje alespoň jedno x , pro které platí....	$\exists x : \boxed{\text{výroková forma}}$	$\exists x : x^2 \leq 1$
o existenci a jednoznačnosti	Existuje právě jedno x , pro které platí....	$\exists! x : \boxed{\text{výroková forma}}$	$\exists! x : x^2 \leq 0$

Tvoření negací: Negace tvrdí opak. Negaci každého výroku můžeme vytvořit zcela mechanicky použitím obrátu „není pravda, že...“ a zopakovat původní výrok. Např. negací výroku „číslo dvě je liché“ je výrok „není pravda, že číslo dvě je liché“. Takto utvořené negace jsou však značně těžkopádné a negace se většinou tvoří jinými prostředky v závislosti na charakteru tvrzení (v tomto případě je negací výrok „číslo dvě je sudé“).

Negace obecného a existenčního výroku: Uvažujme výrok $\forall x : x^2 \geq 0$, tj. výrok „pro každé x platí, že jeho druhá mocnina je větší nebo rovna nule“ (stručněji „druhá mocnina každého čísla je nezáporná“). Negací tohoto výroku je výrok „Existuje alespoň jedno x , jehož druhá mocnina je záporná“. Negací obecného výroku $\forall x : x^2 \geq 0$ je tedy existenční výrok $\exists x : x^2 < 0$. Tedy $\neg(\forall x : x^2 \geq 0)$ je totéž, jako $\exists x : \neg(x^2 \geq 0)$ neboli $\exists x : x^2 < 0$. Podobně negací existenčního výroku je výrok obecný, např.: $\neg(\exists x : |x| < 0)$ je totéž, jako $\forall x : \neg(|x| < 0)$, tedy $\forall x : |x| \geq 0$.

Platí tedy:

Negaci kvantifikovaného výroku utvoříme záměnou kvantifikátoru a negací výrokové formy.

1.2 Množiny a operace s nimi

Množina je matematickým označením pro skupinu, souhrn či soubor objektů, přičemž tento souhrn či soubor v dané situaci chápeme jako celek. Množinu pokládáme za určenou, je-li možno o libovolném objektu jednoznačně rozhodnout, zda do této množiny patří, či nikoliv. Patří-li objekt (prvek) a do množiny A , píšeme $a \in A$, jestliže prvek b nepatří do množiny A , píšeme $b \notin A$. K označení množin se obecně používají velká písmena, jejich prvky se označují malými písmeny. Velmi často se však dodržuje značení obvyklé v jednotlivých matematických disciplínách, které se od tohoto obecného pravidla liší. Např. v geometrii značíme body velkými písmeny a množiny bodů (např. přímky, křivky apod.) písmeny malými nebo i jinak. Zápis $P \in p$ zřejmě znamená „bod P leží na přímce p “, zápis $T \in \Delta ABC$ pak „bod T je bodem trojúhelníka ABC “. Pojem „množina“ nemusí také zcela odpovídat tomu, co si běžně představujeme pod pojmem „souhrn“ či „soubor“ – totiž skupiny skládající se z „velkého počtu“ objektů. V matematice často pracujeme na jedné straně s množinami nekonečnými, na straně druhé s množinami, které obsahují „velmi málo prvků“ – třeba jen jeden nebo dokonce žádný. Množina, která neobsahuje žádný prvek se nazývá **prázdná množina**.

Určení množiny: množinu lze určit (zadat) v podstatě dvojím způsobem:

a) výčtem prvků, tj. výpisem všech prvků, které do dané množiny patří, např.

$$A = \{1; 2; 3; 4\}$$

(takový zápis je ovšem možný pouze pro množiny s „malým počtem“ prvků).

V některých případech je možno úplný výčet prvků pouze „naznačit“, např. množina

$$B = \{0; 1; 2; 3; \dots; 100\}$$

je zřejmě množinou **všech** přirozených čísel od nuly do sta. Každý prvek množiny uvádíme většinou jen jednou, na pořadí prvků nezáleží. Záписы $\{1; 1; 2\}$; $\{1; 2\}$; $\{2; 1\}$ určují tutéž množinu. Prázdnou množinu značíme $\{\}$ nebo častěji $\emptyset$.

b) charakteristickou vlastností, tj. vlastností, kterou se vyznačují všechny prvky dané množiny a žádné jiné. Zjišťování uvažované vlastnosti se provádí v tzv. základní (univerzální) množině Ω , tj. v množině, která obsahuje všechny prvky, které v dané situaci přicházejí v úvahu. Např: $k = \{A \in \Omega \mid d(S, A) = r\}$ je množina všech takových prvků A jisté univerzální množiny Ω , které mají od daného prvku S vzdálenost r . Je zřejmé, že A, S jsou body. Lze tedy předpokládat, že univerzální množinou Ω je množina všech bodů v rovině (pak se jedná o rovinný útvar – kružnici se středem v bodě S a poloměrem r) Pracujeme-li v prostoru (univerzální množinou je množina všech bodů v prostoru), je množinou k popsána kulová plocha.

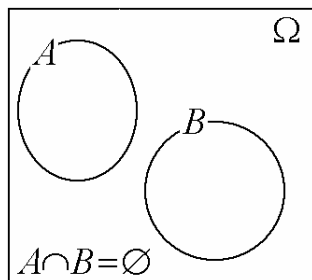
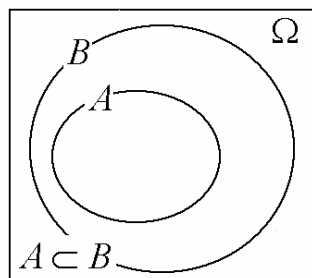
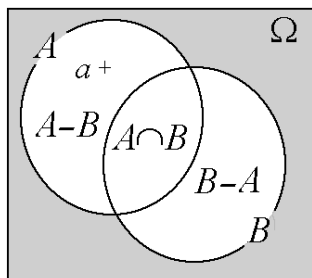
Množinové vztahy a operace (A, B značí libovolné množiny):

Název	Zápis	Symbolická definice	Slovní popis
Inkluze	$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in \Omega : x \in A \Rightarrow x \in B)$		A je podmnožinou B právě tehdy, když každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B .
Rovnost	$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ $(\forall x \in \Omega : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$		Množiny A, B jsou si navzájem rovny právě tehdy, když obsahují tytéž prvky
Ostrá inkluze	$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$		A je vlastní podmnožinou B právě tehdy, když A je podmnožinou B a není této množině rovna.
Sjednocení	$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \vee x \in B\}$		Sjednocení množin A, B je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A, B .
Průnik	$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \in B\}$		Průnik množin A, B je množina všech prvků, které patří do obou množin A, B .
Rozdíl	$A - B = \{x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \notin B\}$		Rozdíl množin A, B je množina všech prvků, které patří do A a nepatří do B .

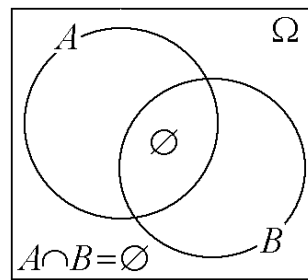
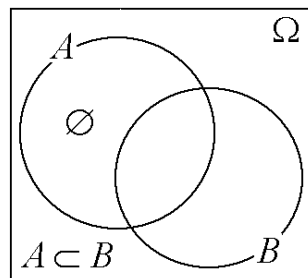
Rozdíl $A - B$ se někdy nazývá **doplňěk množiny B v množině A** a značí se B'_A . Rozdíl $\Omega - B$ se nazývá **doplňěk množiny B** a místo B'_Ω se značí obvykle jen B' .

1. Příklady: Necht' $A = \{x \in \Omega \mid x^2 = 4\}$; $B = \{-2; 2; 4; 6\}$; $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$ ($\mathbb{Z}$ zde značí množinu všech celých čísel – viz dále); $D = \{-2; 2\}$. Potom je $A \subset B$; $A \subset C$; $D \subset C$; $A \subseteq D \wedge D \subseteq A$, tj. $A = D$. Dále je např. $B \cup C = \{-2; -1; 0; 1; 2; 4; 6\}$ a $B \cap C = \{-2; 2\} = D$.

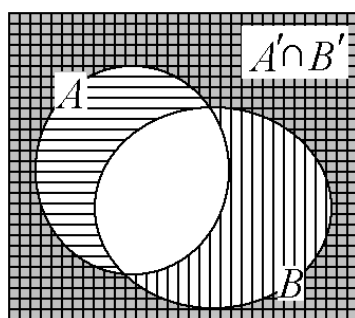
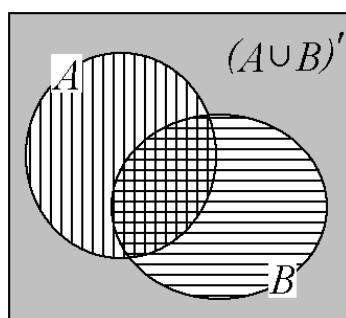
K názorné představě o množinách a vztazích mezi nimi se používají tzv. **množinové (Vennovy) diagramy**. Základní množina se znázorňuje jako obdélník, ostatní množiny jako kruhy, ovály či podobné útvary uvnitř tohoto obdélníka. Pokud množiny nezakreslíme do obdélníka, předpokládá se, že základní množinou je celá rovina (náčrta). Jednotlivé prvky množin znázorňujeme jako body uvnitř příslušných oblastí. Na prvním obrázku máme popsán průnik množin A, B , bílou barvou označeno sjednocení těchto množin – $A \cup B$, šedou pak doplněk tohoto sjednocení, tj. množinu $(A \cup B)'$. O zakresleném prvku a lze zapsat: $a \in A$; $a \notin B$; $a \notin A \cap B$; $a \in A \cup B$; $a \in A - B$. Jestliže chceme diagramem zachytit dvě



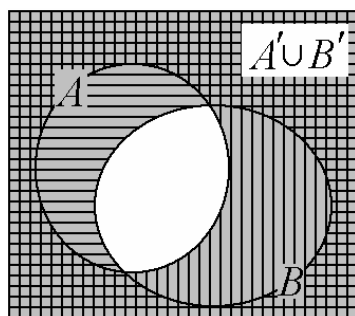
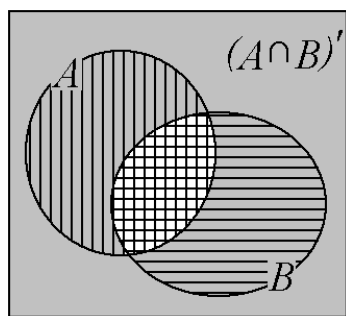
libovolné množiny, musíme je zakreslit tak, aby „bylo místo“ pro množiny $A \cap B$, $A - B$ i $B - A$, tj. tak, jak ukazuje první obrázek. Na druhém obrázku vlevo je zachycena situace $A \subset B$ – nelze zde zakreslit prvek a z prvního obrázku (není zde místo pro množinu $A - B$). Na třetím obrázku vlevo máme situaci, kdy množiny A, B jsou disjunktní, tj. $A \cap B = \emptyset$. Na tomto diagramu „není místo“ pro průnik množin A, B . Takové diagramy používáme výjimečně. Situaci, kterou zachycují, znázorňujeme raději rovněž „obecnými diagramy“ tak, jak ukazují obrázky vpravo.



Užití Vennových diagramů ke studiu vlastností množinových operací: Pomocí Vennových diagramů ukažme, že pro každé dvě množiny A, B platí: $(A \cup B)' = A' \cap B'$;



$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$



$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ (tzv. de Morganovy formule).

Na diagramu vlevo je svisle vyšrafovaná množina A , vodorovně množina B . Množina $A \cup B$ je tedy znázorněna oblastí, kde se nachází alespoň jedno šrafování, množina $(A \cup B)'$ pak nešrafovanou oblastí (vyplněna šedou barvou). Na diagramu vpravo je svisle vyšrafovaná množina A' , vodorovně B' . Průnik těchto dvou množin – $A' \cap B'$ je tedy šrafován dvojité a opět vybarven šedě. Na obou diagramech je šedě vybarvena stejná oblast. Na další dvojici diagramů je stejným způsobem ilustrována druhá formule. Situaci již ponecháváme bez komentáře.

Sjednocení a průnik množin můžeme aplikovat na více množin.

2. Příklad: Mějme množiny $A_1 = \{0; 1; 2; 3; 4\}$; $A_2 = \{0; 2; 4; 6; 8\}$; $A_3 = \{0; 3; 6; 9; 12\}$. Potom $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{0\}$; $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{0; 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12\}$. Místo zápisů $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ resp.

$A_1 \cup A_2 \cup A_3$ můžeme psát $\bigcap_{i=1}^3 A_i$ resp. $\bigcup_{i=1}^3 A_i$.

Efektivita těchto zápisů vynikne při větším počtu množin, se kterými operujeme:

3. Příklad: Mějme množiny

$$A_0 = \{10; 20; 30; \dots; 90\}$$

$$A_1 = \{11; 21; 31; \dots; 91\}$$

$$A_2 = \{12; 22; 32; \dots; 92\}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_9 = \{19; 29; 39; \dots; 99\}$$

Zapišme jejich průnik a sjednocení.

Řešení:

$$A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8 \cap A_9 = \bigcap_{i=0}^9 A_i = \emptyset$$

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9 = \bigcup_{i=0}^9 A_i = \{10; 11; 12; \dots; 98; 99\}$$

Místo zápisu $\bigcap_{i=0}^9 A_i$ lze také definovat tzv. indexovou množinu $I = \{0; 1; \dots; 9\}$ a psát $\bigcap_{i \in I} A_i$.

Neřešené úlohy

1) Užitím Vennových diagramů ukažte, že

a) $A - B = A \cap B'$

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $B - A = A' \cap B$

d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2) Jsou dány množiny $A = \{1; 2\}$; $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Určete

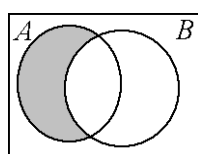
a) množiny $A \cup B$; $A \cap B$

b) všechny množiny X , pro které platí: $X \cup A = B$

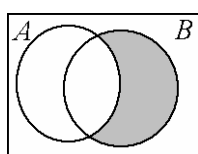
3) Jsou dány množiny $A_0 = \{0\}$; $A_1 = \{8\}$; $A_2 = \{16\}; \dots; A_{10} = \{80\}$. Určete jejich sjednocení

Výsledky:

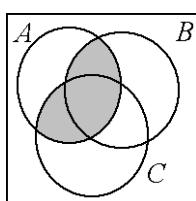
1) a)



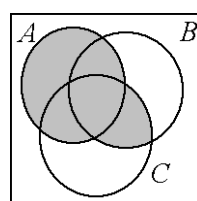
b)



c)



d)



2) a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$

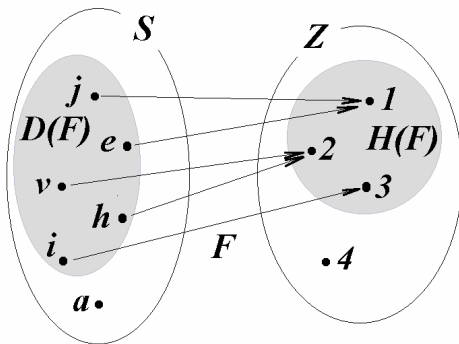
$$A \cap B = \{1, 2\}$$

b) $\{3; 4\}$; $\{1; 3; 4\}$;

$$\{2; 3; 4\}$$
; $\{1; 2; 3; 4\}$;

$$3) A = \bigcup_{k=0}^{10} A_k = \bigcup_{k=0}^{10} \{8 \cdot k\} = \{0; 8; 16; \dots; 72; 80\}$$

1.3 Zobrazení



Uvažujme množinu studentů skládajících zkoušku z matematiky:

$$S = \{Jindra; Eva; Adam; Vlasta; Helena; Ivo\}.$$

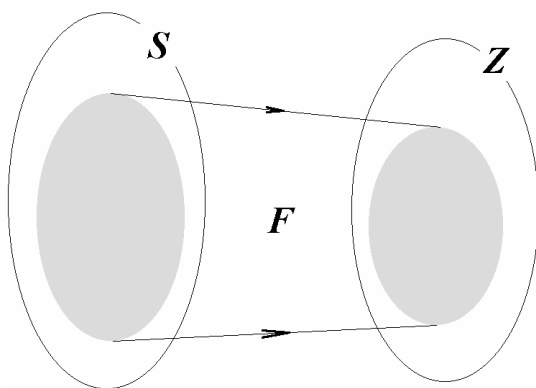
Studenty označme pro stručnost jen počátečními písmeny jmen a v souladu s obvyklým značením malými písmeny, tedy $S = \{j; e; a; v; h; i\}$. Dále označme Z množinu všech známek, které mohou u zkoušky na vysoké škole dostat, tedy $Z = \{1; 2; 3; 4\}$. Víme, že Jindra a Eva dostali jedničky, Vlasta a Helena dvojku, Ivo trojku.

Adam se ze zkoušky omluvil a nebyl hodnocen. Výsledek zkoušky můžeme zapsat jako novou množinu F , jejímiž prvky budou dvojice student-známka:

$$F = \{[j; 1]; [e; 1]; [v; 2]; [h; 2]; [i; 3]\}.$$

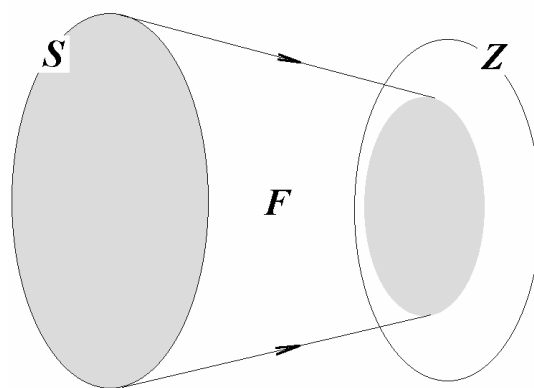
Ve dvojicích vždy dodržíme pořadí student-známka, a proto mluvíme o **uspořádaných dvojicích**. První prvek z této dvojice patří do množiny S , druhý do množiny Z . Celou situaci můžeme zachytit graficky tak, jak ukazuje připojený obrázek. Přitom **každému prvku** $x \in S$ **je** tímto způsobem **přiřazen nejvýše jeden prvek** $y \in Z$ (student nemůže dostat ze zkoušky dvě známky).

Množinu F sestavenou tímto způsobem nazýváme **zobrazení z množiny S do množiny Z** , zapisujeme $F: S \rightarrow Z$. V uspořádané dvojici $[x; y] \in F$ nazýváme prvek $y \in Z$ obraz prvku $x \in S$ v zobrazení F , naopak prvek $x \in S$ je vzorem prvku $y \in Z$ v zobrazení F . Množinu všech vzorů zobrazení F nazýváme **definičním oborem** tohoto zobrazení, značíme $D(F)$. Množinu všech obrazů zobrazení F nazýváme **oborem hodnot** tohoto zobrazení, značíme $H(F)$. Základní typy zobrazení jsou zachyceny na následujících schématech (v závorce je situace popsána výše uvedeným příkladem):



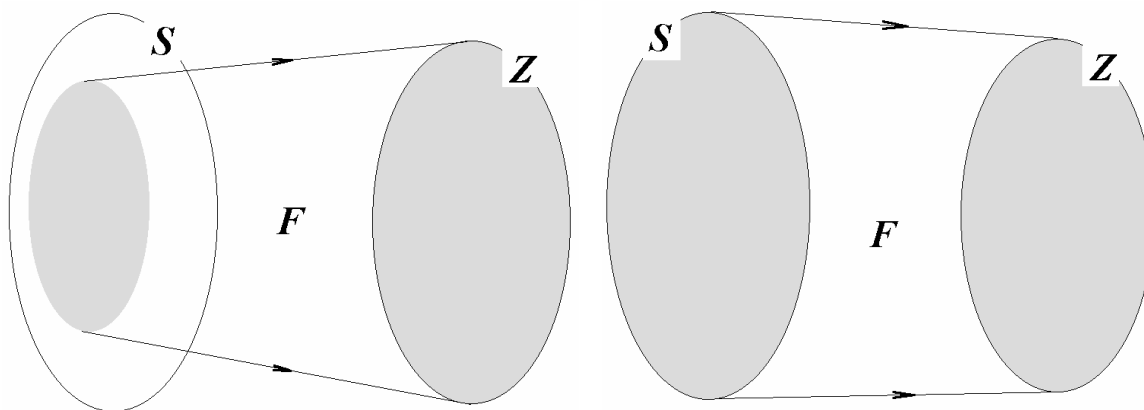
$$D(F) \subset S; H(F) \subset Z$$

zobrazení z množiny do množiny
(někteří studenti nehodnoceni,
některé známky neuděleny)



$$D(F) = S; H(F) \subset Z$$

zobrazení (celé) množiny do množiny
(všichni studenti hodnoceni,
některé známky neuděleny)



$$D(F) \subset S ; H(F) = Z$$

zobrazení z množiny na (celou) množinu
(někteří studenti nehodnoceni,
všechny známky uděleny)

$$D(F) = S ; H(F) = Z$$

zobrazení (celé) množiny na (celou) množinu
(všichni studenti hodnoceni,
všechny známky uděleny)

Je možné uvažovat rovněž o zobrazení množiny S do téže množiny S . Hovoříme pak o zobrazení v množině S (v případě zobrazení S na S pak o zobrazení na množině S). Zvláště významné místo mají v matematice následující zobrazení:

Prosté zobrazení: Je zobrazení, v němž každý prvek $y \in H(F)$ je obrazem právě jednoho prvku $x \in D(F)$.

1. Příklad: A – množina všech vstupenek na představení; B – množina všech sedadel v sále. Uvažujme množinu uspořádaných dvojic vstupenka-sedadlo. Majitel jedné vstupenky nemůže obsadit dvě sedadla (jedná se o zobrazení $F : A \rightarrow B$) a navíc pro každého majitele vstupenky je rezervováno zvláštní sedadlo (jedná se o zobrazení prosté).

Bijektivní zobrazení: je prosté zobrazení množiny na množinu, tj. prosté zobrazení $F : A \rightarrow B$, kde $D(F) = A$, $H(F) = B$. Často se také používá označení **vzájemně jednoznačné zobrazení** mezi množinami A , B .

2. Příklad: Uvažujme situaci z předchozího příkladu, tj. A – množina všech vstupenek na představení; B – množina všech sedadel v sále; a předpokládejme, že je vyprodáno. Jde o prosté zobrazení (viz předchozí příklad). Navíc všechny vstupenky byly vyprodány ($D(F) = A$) a všechna sedadla v sále jsou obsazena ($H(F) = B$).

Toto zobrazení ukazuje důležitou vlastnost množin: pokud totiž existuje, pak můžeme prohlásit, že obě množiny mají „stejný počet prvků“ (aniž bychom tyto prvky počítali a zjišťovali, kolik jich je). V předchozím příkladě bychom tento počet mohli zjistit následným spočítáním vstupenek nebo sedadel.

Neřešené úlohy

1) Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b, c\}$. Rozhodněte, které z následujících množin jsou zobrazení a určete typ zobrazení:

a) $\{[1; a]; [2; a]; [3; c]\}$ **b)** $\{[1; c]; [1; b]; [3; a]\}$ **c)** $\{[1; b]; [2; b]; [3; b]\}$ **d)** $\{[1; b]; [2; a]; [3; c]\}$

Výsledky:

1) **a)** zobrazení A do B **b)** není zobrazení **c)** zobrazení A do B **d)** zobrazení A na B (prosté zobrazení)

1.4 Základní množiny bodů

Ze střední školy známe základní geometrické útvary – jsou to **bod, přímka a rovina** – rovněž jejich základní vztahy: přímka i rovina jsou množiny bodů, přímka je podmnožinou roviny. Je-li bod prvkem přímky či roviny, nebo přímka podmnožinou roviny, říkáme, že tyto útvary jsou **incidentní**. Skutečnost, že útvary jsou ve vztahu incidence, vyjadřujeme často takto: bod V leží (neleží) na přímce p (nebo naopak přímka p prochází či neprochází bodem V) tj. $V \in p$ ($V \notin p$), bod V leží (neleží) v rovině α (nebo naopak rovina α prochází či neprochází bodem V) tj. $V \in \alpha$ ($V \notin \alpha$), přímka p leží (neleží) v rovině α (nebo naopak rovina α prochází či neprochází přímkou p) tj. $p \subset \alpha$ ($p \not\subset \alpha$).

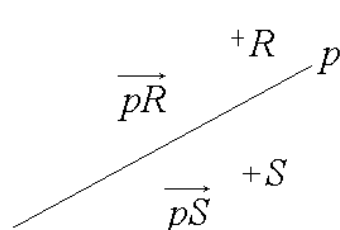
Geometrickým útvarem rozumíme libovolnou množinu bodů (bodovou množinu). Dva geometrické útvary $U_1; U_2$ jsou **shodné** (zapisujeme $U_1 \cong U_2$) právě tehdy, když lze jeden na druhý přemístit tak, že útvary splynou (splnutí útvarů $U_1; U_2$ značíme $U_1 \equiv U_2$).

Polopřímka: Bod $V \in p$ ležící na přímce p rozdělí tuto přímku na dvě opačné polopřímky $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$, bod V je jejich společným počátkem.

Úsečka: Necht' na přímce p leží dva body A, B . Úsečkou AB rozumíme průnik polopřímek $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BA}$, tedy $AB = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Za úsečku považujeme i průnik opačných polopřímek (tj. úsečku AB , kde $A \equiv B$). Tuto úsečku nazýváme **nulovou úsečkou**.

Délka úsečky: Každé úsečce AB přiřadíme **nezáporné reálné číslo** zvané délka úsečky (značíme $|AB|$) tak, že

- Délka úsečky je rovna nule právě tehdy, je-li úsečka nulová.
- Každé dvě shodné úsečky mají stejnou délku.
- Pro každé tři různé body A, B, C je $|AB| + |BC| \geq |AC|$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když body A, B, C leží na téže přímce



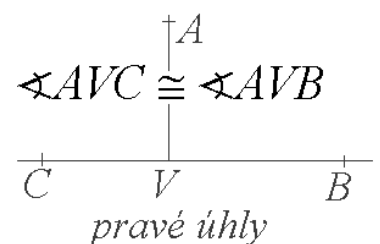
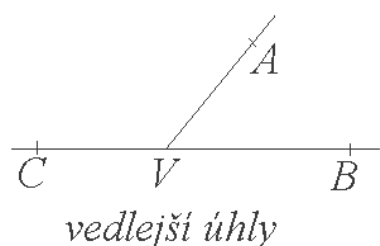
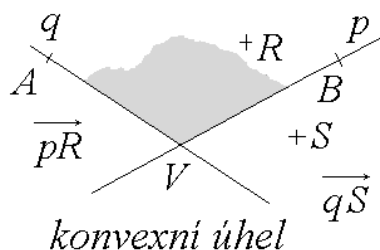
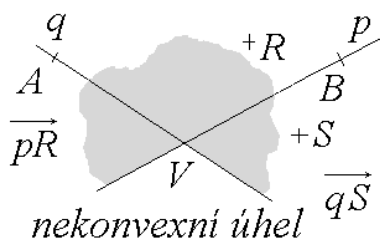
Polorovina: Přímka $p \subset \alpha$ ležící v rovině α (viz obrázek) rozdělí tuto rovinu na dvě opačné poloroviny $\overrightarrow{pR}; \overrightarrow{pS}$, přímka p je jejich společnou hraniční přímkou. Je-li přímka p určena dvěma body $A, B \in p$, pak polorovinu můžeme zapsat ve tvaru $\overrightarrow{ABR}$, popř. $\overrightarrow{ABS}$.

Různoběžky, rovnoběžky: dvě přímky $p, q \subset \alpha$ ležící v téže rovině α mohou mít

- nekonečně mnoho společných bodů, tj. $p \equiv q$ (přímky splynou)
- právě jeden společný bod, tj. $P \in p \cap q$ (různoběžné přímky, různoběžky, značíme $p \times q$)
- žádný společný bod, tj. $p \cap q = \emptyset$ (rovnoběžné přímky, rovnoběžky, značíme $p \parallel q$).

Splývající přímky jsou většinou považovány za zvláštní případ rovnoběžek. Máme-li tedy na mysli případ c), většinou zdůrazňujeme, že se jedná o přímky **rovnoběžné různé**. Pojem rovnoběžnosti rozšiřujeme i na polopřímky a úsečky. Tyto útvary jsou rovnoběžné právě tehdy, jsou-li rovnoběžné přímky, na kterých leží.

Úhel: Průnik dvou různých polorovin $\overrightarrow{pR}; \overrightarrow{qS}$ roviny α , jejichž hraniční přímky $p, q \in \alpha$ mají společný bod $V \in p \cap q$ se nazývá **konvexní úhel**, jejich sjednocení pak **nekonvexní úhel**.



Sjednocení dvou opačných polorovin – **plný úhel** – řadíme však mezi úhly konvexní. Průnik dvou opačných polorovin nazýváme **nulovým úhlem**.

Vedlejší úhel: $\sphericalangle AVC$ je vedlejší k $\sphericalangle AVB$ (tyto úhly mají společné rameno – polopřímku $\overrightarrow{VA}$) právě tehdy, když ramena $\overrightarrow{VB}$; $\overrightarrow{VC}$ jsou opačné polopřímky ($\sphericalangle BVC$ v tom případě nazýváme přímým úhlem).

Pravý úhel: je každý úhel, který je shodný se svým úhlem vedleším.

Svírají-li dvě přímky p, q pravý úhel, říkáme, že jsou navzájem kolmé, značíme $p \perp q$ (analogicky pro polopřímky a úsečky). Průsečík $P \in p \cap q$ nazýváme patou kolmice p , popř. patou kolmice q .

Velikost úhlu: Každému úhlu lze přiřadit právě jedno nezáporné číslo zvané velikost úhlu (značíme $|\sphericalangle AVB|$) takové, že

- a) velikost úhlu je rovna nule právě tehdy, když tento úhel je nulový
- b) každé dva shodné úhly mají stejnou velikost
- c) je-li $\sphericalangle BVC$ úhel, rozdělený polopřímkou $\overrightarrow{VA}$ na dva úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$, pak $|\sphericalangle BVC| = |\sphericalangle AVB| + |\sphericalangle AVC|$.

Velikosti úhlů stejně jako úhly samotné značíme často stručně malými řeckými písmeny. Úhel $\sphericalangle BVC$ přitom nazýváme součtem úhlů $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$.

Stupňová míra: Jednotkou je jeden úhlový stupeň ($\frac{1}{90}$ pravého úhlu).

Ostrý a tupý úhel: Ostrým úhlem rozumíme úhel s velikostí $0^\circ < \alpha^\circ < 90^\circ$, tupým úhlem úhel o velikosti $90^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$.

Trojúhelníkem ABC (označíme ΔABC) rozumíme průnik polorovin

$$\Delta ABC = \overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{ACB} \cap \overrightarrow{CBA},$$

kde $A; B; C$ jsou navzájem různé body, které neleží na jedné přímce (nazýváme je vrcholy trojúhelníka). Strany trojúhelníka značíme často malými písmeny ($AB = c$; $BC = a$; $AC = b$).

Malá písmena lze tak chápat v podstatě trojím způsobem:

- a) jako označení **přímky**, na které leží dva vrcholy
- b) jako označení **strany** trojúhelníka (tj. označení úsečky)
- c) jako **velikost** příslušné strany.

Konkrétní význam bývá vždy zřejmý ze souvislostí.

Kružnice: je množina bodů v rovině, které mají od daného pevného bodu (středu) stejnou vzdálenost (tzv. poloměr kružnice). Poloměrem kružnice nazýváme zároveň každou úsečku s jedním krajním bodem ve středu kružnice a druhým na kružnici. Kružnici značíme nejčastěji

k (v případě potřeby odlišujeme indexem). Kružnici nejčastěji zadáváme jejím středem a poloměrem. Je-li kružnice k takto zadána (určena), zapisujeme $k \equiv (S, r)$.

Kruhový oblouk: Dva body kružnice $A \in k; B \in k$ rozdělí tuto kružnici na dva kruhové oblouky (kruhový oblouk značíme $\widehat{AB}$).

V závěru kpt. 1.3 jsme uvedli, že vzájemně jednoznačné (bijektivní) zobrazení mezi dvěma množinami umožňuje rozhodnout, zda tyto množiny mají stejný počet prvků, aniž bychom jednotlivé prvky „počítali“ (viz př. 2). V mnoha případech lze jít ještě dál.

1. Příklad: Uvažujme obdélník $ABCD$ a zobrazení $F: AB \rightarrow CD$, jehož konstrukce je zřejmá z připojeného obrázku. I zde se jedná o vzájemně jednoznačné zobrazení úsečky AB na úsečku CD . I zde bychom tedy mohli prohlásit, že úsečky AB a CD mají „stejný počet“ prvků – bodů, tedy dokonce v situaci, kdy tento „počet“ bodů nejsme schopni zjistit.

Tento příklad ukázal, že pokud mají úsečky stejnou délku, existuje mezi nimi vzájemně jednoznačné zobrazení a tyto úsečky mají v jistém smyslu „stejný počet“ bodů. Vzájemně jednoznačné zobrazení však existuje dokonce mezi libovolnými úsečkami.

2. Příklad: Mějme dvě úsečky AB, CD , které nemají stejnou délku, nejsou na sebe kolmé a body A, B, C, D neleží na téže přímce. Konstrukce vzájemně jednoznačného $F: AB \rightarrow CD$ je opět zřejmá z připojeného obrázku. Toto zobrazení je možné sestavit dokonce i v případě, že $CD \subset AB$ (viz poslední obrázek). Úsečku CD je totiž možno přenést mimo úsečku AB a celou konstrukci zopakovat.

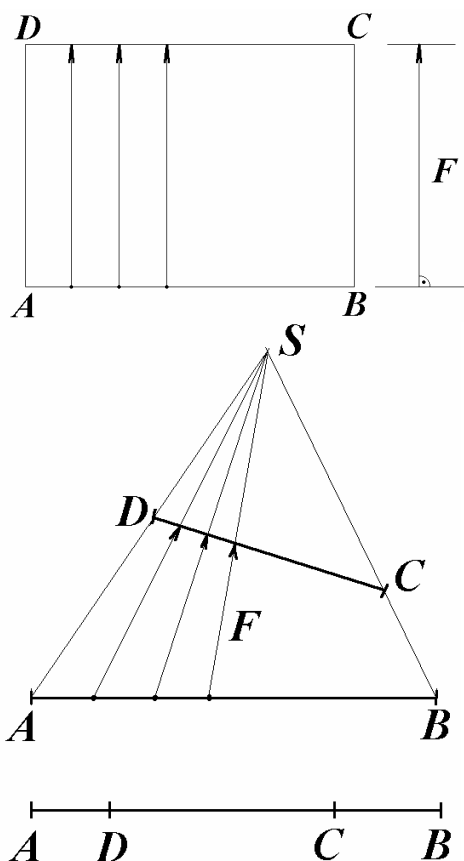
V tomto případě se nám podařilo jistou množinu bijektivně zobrazit na její vlastní podmnožinu. Tato konstrukce však funguje pouze u množin s jistou speciální vlastností:

Nekonečná množina je množina, kterou lze jednoznačně zobrazit na její vlastní podmnožinu.

Množinu, která není nekonečná, nazýváme **množinou konečnou**. Existuje-li mezi dvěma **konečnými** množinami A, B vzájemně jednoznačné zobrazení, říkáme, že tyto množiny mají stejný počet prvků.

Nekonečnou množinou bodů je např. libovolná úsečka, libovolný „běžný“ rovinný útvar (čtverec, trojúhelník, kruh...) i libovolný „běžný“ prostorový útvar (krychle, válec, koule...). Nekonečnými množinami jsou i samotná přímka, rovina a prostor.

Pro neřešené úlohy z této oblasti nemáme dostatek zopakovaného učiva, proto zde neřešené příklady vynecháme. Zde uvedené pojmy budou procvičeny dále (především v kpt. 5. a 6.).



1.5 Matematické axiomy, definice, věty a důkazy

Definice „elementárních“ matematických pojmů nelze sestavit v podobě „bod je“, „rovina je ...“. Takové definice totiž používají k popisu pojmů další pojmy, které musí být opět definovány. Takový proces by tedy zřejmě nemohl nikde začít. Základním rysem současné

matematiky je její tzv. axiomatická výstavba. Jejím základem je několik výchozích výroků, o nichž se předpokládá, že jsou pravdivé a nedokazují se. Jedná se o tzv. **axiomy** (postuláty). Ty nemohou být voleny zcela libovolně. Na soustavu axiomů klade matematika řadu přísných požadavků a striktně rovněž vymezuje pravidla, jak s těmito axiomy zacházet. Tyto otázky sice nejsou ve své obecnosti předmětem středoškolské matematiky, nicméně následující základní středoškolské poznatky z této oblasti jsou pro další studium matematiky nezbytné.

Axiomy uvádějí základní (primitivní) pojmy a jejich vlastnosti. Další pojmy zavádí matematika pomocí těchto pojmů základních, a to pomocí **definic**. Vlastnosti neuvedené v axiomech jsou uváděny v matematických **větách**, které je třeba matematicky **dokázat**.

Většina matematických vět má podobu **obecného** nebo **existenčního výroku**.

Obecná věta: $\forall x \in \Omega : V(x)$ – každé x z uvažované základní množiny Ω má vlastnost $V(x)$.

Existenční věta: $\exists x \in \Omega : V(x)$ – existuje alespoň jedno x ze základní množiny Ω , které má vlastnost $V(x)$. Vlastnost $V(x)$ má velmi často podobu implikace $A(x) \Rightarrow B(x)$, kde $A(x)$ jsou předpoklady, $B(x)$ závěr.

Věta o existenci a jednoznačnosti: $\exists! x \in \Omega : V(x)$ – existuje právě jedno x ze základní množiny Ω , které má vlastnost $V(x)$

Individuální věta: přisuzuje nějakou vlastnost jednomu konkrétnímu objektu (např. číslu)

1. Příklad – obecná věta ve tvaru implikace: Pro každé přirozené číslo platí: jestliže je dělitelné šesti, pak je dělitelné dvěma.

„Obecná část“ věty se často vynechává nebo je skryta v předpokladech: „Je-li přirozené číslo dělitelné šesti, je dělitelné dvěma“.

Věta s podmínkou nutnou a věta s podmínkou postačující:

2. Příklad: a) **Každé číslo dělitelné šesti je (automaticky) dělitelné dvěma.**

b) **Číslo dělitelné dvěma může (ale nemusí) být dělitelné šesti.**

Množina všech čísel dělitelných šesti je podmnožinou množiny všech čísel dělitelných dvěma. Větu a) lze tedy vyslovit také takto:

Dělitelnost šesti je postačující podmínkou pro dělitelnost dvěma.

Dělitelnost dvěma je nutnou podmínkou pro dělitelnost šesti.

Věta b) říká, že existují čísla, která jsou dělitelná dvěma, ale nejsou dělitelná šesti:

Dělitelnost šesti není podmínkou nutnou pro dělitelnost dvěma.

Dělitelnost dvěma není postačující podmínkou pro dělitelnost šesti.

Věta s podmínkou nutnou a zároveň postačující:

3. Příklad: Je-li číslo dělitelné třemi, pak jeho ciferný součet je dělitelný třemi.

Zde je dělitelnost třemi **postačující podmínkou** pro dělitelnost ciferného součtu. Zároveň však **je i podmínkou nutnou**, neboť neexistuje žádné číslo, jehož ciferný součet by byl dělitelný třemi a číslo samo by dělitelné třemi nebylo – množina všech čísel, kterou vymezují předpoklady, je rovna množině čísel, určené závěrem.

Shrnutí: věta a) z příkladu 1 je věta s podmínkou postačující, věta b) z příkladu 2 je věta s podmínkou nutnou, věta z př. 3. je větou s podmínkou nutnou i postačující.

Obecnou větu ve tvaru implikace je možné **obměnit** a v některých případech **obrátit**.

Obměnit větu $\forall x \in \Omega : A(x) \Rightarrow B(x)$ znamená nahradit ji větou $\forall x \in \Omega : \neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)$ (větu „Je-li číslo dělitelné šesti, pak je dělitelné dvěma“ nahradíme větou „Není-li číslo dělitelné dvěma, není dělitelné ani šesti“) – tyto věty jsou ekvivalentní (tvrdí totéž) – viz tabulku pravdivostních hodnot v kpt. 1.1., sloupec 5 a 11.

Obrátit větu $\forall x \in \Omega : A(x) \Rightarrow B(x)$ znamená v implikaci zaměnit předpoklad a závěr, tj. nahradit ji větou $\forall x \in \Omega : B(x) \Rightarrow A(x)$ (větu „Je-li číslo dělitelné šesti, pak je dělitelné dvěma“ nahradíme větou „Je-li číslo dělitelné dvěma, pak je dělitelné šesti“) – tyto věty však nejsou ekvivalentní (netvrdí totéž) – v tomto případě je původní věta pravdivá, obrácená věta nepravdivá. Obrátit větu lze pouze v případě, že se jedná o **větu s podmínkou nutnou a zároveň s podmínkou postačující**. Takovou větu lze pak zapsat ve tvaru tzv. ekvivalence $\forall x \in \Omega : A(x) \Leftrightarrow B(x)$ – čteme: pro každé x platí $A(x)$ právě tehdy, když platí $B(x)$.

4. Příklad:

Původní věta: Je-li číslo dělitelné třemi, pak jeho ciferný součet je dělitelný třemi. (**platí**)

Obrácená věta: Je-li ciferný součet čísla dělitelný třemi, pak je číslo dělitelné třemi. (**platí**)

Ekvivalence: Číslo je dělitelné třemi **právě tehdy, když** je třemi dělitelný jeho ciferný součet (**platí**).

Důkaz v matematice: je proces, kterým ověřujeme pravdivost výroku (tvrzení, matematické věty) za předpokladu, že platí výroky jiné (axiomy či dříve dokázané věty). Základními typy důkazů jsou:

a) Přímý důkaz implikace $\forall x \in \Omega : A(x) \Rightarrow B(x)$ **spočívá v sestavení řetězce pravdivých implikací** $A(x) \Rightarrow A_1(x)$, $A_1(x) \Rightarrow A_2(x)$, ..., $A_n(x) \Rightarrow B(x)$, z něhož plyne platnost původní implikace.

b) Nepřímý důkaz implikace $\forall x \in \Omega : A(x) \Rightarrow B(x)$ **spočívá v přímém důkazu obměny věty**, tj. věty $\forall x \in \Omega : \neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)$, která (jak víme) je s původní větou ekvivalentní.

c) Důkaz sporem: Větu $V(x)$ dokážeme tak, že **dokážeme neplatnost její negace** $\neg V(x)$. Většinou z předpokladu $\neg V(x)$ opět vyvozujeme řetězec implikací $\neg V(x) \Rightarrow A_1(x)$, $A_1(x) \Rightarrow A_2(x)$, ..., $A_n(x) \Rightarrow B$, kde výrok B je nepravdivý (říkáme, že jsme dospěli ke sporu). Věta $\neg V(x)$ tedy nemůže platit, a proto musí platit věta $V(x)$.

Poznámka: Často se setkáváme s názorem, že nepřímý důkaz a důkaz sporem je jedno a totéž. To však není pravda: Při nepřímém důkazu dokazujeme platnost věty ekvivalentní, kdežto při důkazu sporem dokazujeme neplatnost negace.

d) Důkaz matematickou indukcí: Je speciální technika důkazu věty $\forall n \in \mathbb{N} : V(x)$, kde $\mathbb{N}$ je množina všech přirozených čísel.

e) Vyvrácení hypotéz: Hypotézy (dosud nedokázané věty) mohou mít formu obecného výroku $\forall x \in \Omega : V(x)$. Tuto hypotézu lze dokázat některým z výše uvedených způsobů nebo ji lze také vyvrátit tím, že dokážeme její negaci, tj. větu $\exists x \in \Omega : \neg V(x)$. K tomu stačí uvést **jedno jediné** x , pro které platí $\neg V(x)$. Říkáme že jsme našli **protipříklad** vyvracející obecnou hypotézu.

Také zde by byly další příklady poněkud samoučelné. Jednotlivé typy důkazů předvedeme postupně na několika důležitých větách v následujícím textu.